Применение координатного метода к решению стереометрических задач ЕГЭ по математике профильного уровня

Гнатюк А.Н.
учитель математики,
Сироткина А.Ю.
студентка ТюмГУ ИМиКН

Стереометрия является одним из самых сложных разделов школьной математики для учеников. По статистике за последние несколько лет стереометрическую задачу №13 единого государственного экзамена по математике профильного уровня решает менее 5% выпускников, что говорит о необходимости развивать пространственное мышление школьников, уделять больше времени геометрическим задачам различного уровня сложности, обучать различным методам решения.

Одним из самых универсальных методов является координатный, который доступен большинству учеников. Если уделить ему должное внимание, можно решать даже самые сложные задачи, поэтому рационально хотя бы в рамках элективного курса расширить школьный курс некоторыми сведениями из аналитической геометрии и показать возможность применения данного метода на заданиях ЕГЭ.

В качестве примера можно привести несколько задач из единого государственного экзамена, решенных с помощью данного метода.

Пример 1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD проведена высота SH. K — середина ребра SD, N — середина ребра CD. Плоскость ABK пересекает ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая PK делит отрезок NS пополам.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости ABS, если SH = 15, CD = 16.

Дано:

SABCD – правильная пирамида

SH ⊥ (ABC)

K ∈ SD, SK = KD

N ∈ CD, CN = ND

(ABK) ∩ SC = P

а) Доказать: SM = MN, где KP ∩ SN = M

б) Найти: ρ (P; (ABS)), если SH = 15,

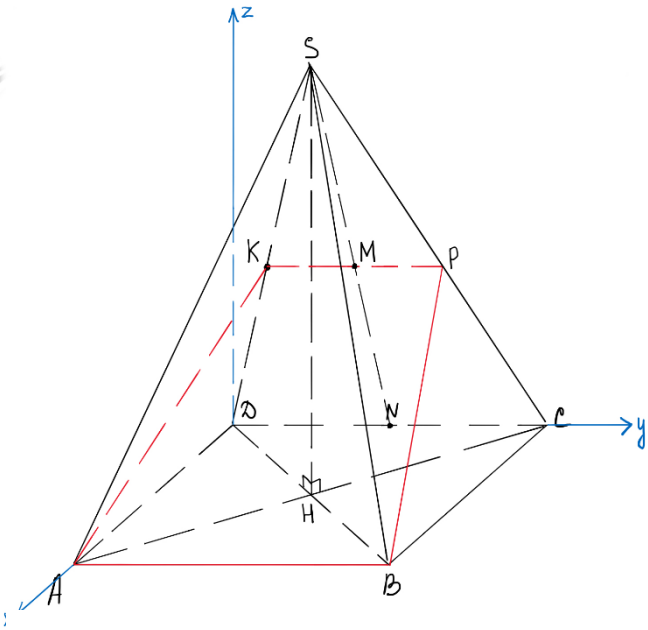

Рисунок 1 – Чертеж к задаче № 1

CD = 16

Решение

а) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $D\ (0;0;0)$, как показано на рис. 1.

Найдем координаты используемых точек:

$A\ (16;0;0); B\ (16;16;0); C(0;16;0);\ S\ (8;8;15);\ K\ \left(4;4;\frac{15}{2}\right)$ (по формуле для нахождения координат середины отрезка).

Чтобы найти координаты точки пересечения ребра SC с плоскостью ABK, необходимо составить уравнение прямой и уравнение плоскости. Прямая SC задается системой (по двум точкам):

$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 16 - 8t \\ z = 15t \end{cases}$$

Составим уравнение плоскости ABK по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-16 & y & z \\ 0 & 16 & 0 \\ -12 & 4 & \frac{15}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$120x - 16 \cdot 120 + 12 \cdot 16z = 0 \implies 5x + 8z - 80 = 0$$

Найдем координаты точки пересечения P этой плоскости с ребром SC, решив систему:

$$\begin{cases} 5x + 8z - 80 = 0 \\ x = 8t \\ y = 16 - 8t \\ z = 15t \end{cases} \implies 40t + 120t - 80 = 0 \implies t = \frac{1}{2} \implies P\ \left(4;12;\frac{15}{2}\right)$$

Заметим, что координаты точки P являются полусуммой координат точек S и C, а значит, P – середина ребра SC. Следовательно, PK – средняя линия треугольника SDC, тогда она пересекает медиану SN в середине, что и требовалось доказать.

б) Найдем уравнение плоскости ABS:

$$\begin{vmatrix} x-16 & y & z \\ 0 & 16 & 0 \\ -8 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$16 \cdot 15x - 16 \cdot 15 \cdot 16 + 8 \cdot 16z = 0 \implies 15x + 8z - 240 = 0$$

$P\ \left(4;12;\frac{15}{2}\right)$

Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости:

$$\rho\big(P;\ (ABC)\big) = \frac{\left|15 \cdot 4 + 8 \cdot \frac{15}{2} - 240\right|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = \frac{120}{17} \text{ ед.}$$

Ответ: $\frac{120}{17}$.

Пример 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

а) Доказать: $BD_1 \perp (ACB_1)$

б) Найти: $\angle(AD_1C_1; A_1D_1C)$

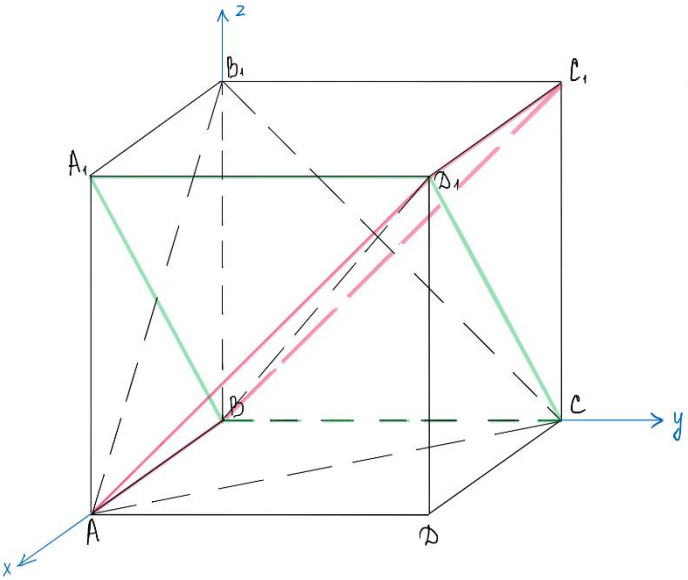

Рисунок 2 – Чертеж к задаче №2

Решение

а) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B (0; 0; 0), как показано на рис. 2.

Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, нужны координаты направляющего вектора этой прямой и координаты вектора нормали плоскости. Найдем координаты нужных точек, обозначив ребро куба за a: $AB = a$, тогда $A\ (a; 0; 0); C\ (0; a; 0); B_1(0; 0; a); D_1(a; a; a)$

Найдем координаты вектора с помощью координат его начала и конца: $\overrightarrow{BD_1}\{a; a; a\}$.

Составим уравнение плоскости ACB_1 по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \implies a^2x - a^3 + a^2y + a^2z = 0 \implies$$

$$x + y + z - a = 0 \implies \vec{n}\{1; 1; 1\}$$

Воспользуемся формулой для нахождения угла между прямой и плоскостью:

$$sin\angle\big(BD_1; (ACB_1)\big) = \frac{|(\overrightarrow{BD_1}; \vec{n})|}{|\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3a}{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 1 \implies \angle\big(BD_1; (ACB_1)\big) = 90°,$$

то есть $BD_1 \perp (ACB_1)$, что и требовалось доказать.

б) Угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей, поэтому необходимо составить уравнения данных плоскостей, для этого нужны координаты принадлежащих им точек:

$$A\ (a; 0; 0);\ D_1(a; a; a); C_1(0; a; a); A_1(a; 0; a); C\ (0; a; 0)$$

Составим уравнение плоскости AD_1C_1по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 0 & a & a \\ -a & a & a \end{vmatrix} = 0 \implies -a^2y + a^2z = 0 \implies y - z = 0 \implies \vec{n_1}\{0; 1; -1\}$$

Составим уравнение плоскости A_1D_1C по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x & y-a & z \\ a & -a & a \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \implies -a^2x + a^2z = 0 \implies x - z = 0 \implies \vec{n_2}\{1; 0; -1\}$$

Воспользуемся формулой для нахождения угла между плоскостями:

$$\cos\angle((AD_1C_1); (A_1D_1C)) = \frac{|(\vec{n_1}; \vec{n_2})|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{2} \implies \angle((AD_1C_1); (A_1D_1C)) = 60°.$$

Ответ: 60°.

Координатный метод является важной составляющей школьного курса геометрии. Данный метод показывает взаимосвязь алгебры и геометрии, что помогает систематизировать знания учащихся. Метод несложен для восприятия, объем теоретического материала по данной теме значительно меньше, по сравнению с объемом материала классической школьной геометрии, что позволяет даже слабым ученикам, имеющим пробелы в знаниях стереометрии, научиться решать сложные задачи. Он позволяет упростить и ускорить решение многих стереометрических задач, в том числе и тех, что встречаются на едином государственном экзамене по математике профильного уровня, что очень важно для выпускников, так как данная задача оценивается в 3 первичных балла и может значительно повысить результаты.

Более того, изучение координатного метода, как одного из основных методов аналитической геометрии в высшей школе, позволяет учащимся адаптироваться к материалу линейной алгебры и аналитической геометрии, предстоящему в высшем учебном заведении.

Однако идеальных методов не существует, и метод координат, безусловно, обладает некоторыми недостатками. Метод, близкий к высшей математике, оперирует в большей степени абстракцией, чем естественными геометрическими образами. Прежде всего это сужает творческое и пространственное мышление, так как ограничивается применение необходимых при решении стереометрических задач знаний и умений, опирающихся на обширный материал школьного курса геометрии. Но его использование не умаляет тех навыков логических рассуждений, которые необходимо применять для решения задач, поэтому не стоит недооценивать его место в школьном курсе математики.